数理解析研究所講究録
第1692巻 2010年 88-100

ガウシアンを超えて

横浜市立大学・国際総合科学部 藤井一幸 (FUJII Kazuyuki)
International College of Arts and Sciences
Yokohama City University

要約

ガウシアン (Gaussian) とは、ガウス関数 (分布) $e^{-(px^2+qx+r)}$ に絡むすべての対象の略称である。例えばガウシアン・ビーム、ガウシアン・プロセス、ガウシアン・ノイズのように。現代の基礎及び応用科学の支柱の一つである。

我々の目的はガウシアンを乗り越えて、新しいパラダイムを構築することである。これは誰かが、どこかでなさなければならない基礎研究である。

[I] はじめに

ガウシアン (Gaussian) とは、ガウシアン・ビーム、ガウシアン・プロセス、ガウシアン・ノイズのように ガウス関数 (分布)

$$e^{-f(x)}; \quad f(x)=px^2+qx+r \tag{1}$$

に絡むすべての対象の略称である。

ガウス関数は2変数に広げると

$$e^{-f(x,y)}; \quad f(x,y)=px^2+qxy+ry^2=(x,y)\begin{pmatrix} p & \frac{q}{2} \\ \frac{q}{2} & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\equiv \mathbf{x}^t A\mathbf{x} \tag{2}$$

と2次形式で表せる。これの特徴は2重積分

$$\int\int_{\mathbf{R}^2} e^{-(px^2+qxy+ry^2)}dxdy=\frac{\pi}{\sqrt{|A|}} \quad (|A|>0), \tag{3}$$

$$|A|=pr-\frac{q^2}{4}=-\frac{1}{4}(q^2-4pr)=-\frac{1}{4}D$$

で与えられる。$|A|$ は $f(x,y)$ の係数から決まる行列式で、D は2次方程式 $px^2+qx+r=0$ の判別式である。

この関数の強みは、関数 (積分) を多次元化出来ることである。即ち、$\mathbf{x}$ を縦ベクトル、A を対応する対称行列として

$$f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^t A\mathbf{x}; \quad \mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^t, \quad A^t=A$$

と表せ、従って公式

$$\int\int\cdots\int_{\mathbf{R}^n} e^{-\mathbf{x}^t A\mathbf{x}} dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{|A|}} \quad (|A|>0)$$

を得るわけである。確かに使いやすい公式で、広範囲に使われている所以である。

では、ガウス関数を

$$e^{-f(x,y)}, \quad f(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \tag{4}$$

と 3 次形式に拡張したらガウシアンとどのような違いが出て来るのであろうか？ この系はもちろんは**ノン・ガウシアン**で、最初に考えるガウシアンの拡張としては妥当なものである。

更にガウス関数を

$$e^{-f(x,y)}, \quad f(x,y) = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + \cdots + a_jx^{n-j}y^j + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n \tag{5}$$

と一般の n 次形式に拡張したらどのような違いが出て来るのであろうか？

(4), (5) に対して (3) のような積分公式は成り立つのか？ もし成り立てば (3) の行列式や判別式に対応するものは何か？ 更に多次元化することが出来るのか？ これは誰かが、どこかでなさなければならない基礎研究である。

[II] ノン・ガウシアン に向けて

この新しい系 (4) に対して積分公式 (3) に対応するものは何か？ 残念ながら

$$\int\int_{\mathbf{R}^2} e^{-(ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3)} dxdy = \infty \tag{6}$$

と発散してしまう。これを打開するためロシアの Morozov & Shakirov は論文 [1] で、空間を $\mathbf{R}^2$ ではなく $\mathbf{C}^2$ の中の $\mathbf{R}^2$ と同相なある曲面 X 上で積分して

$$\int\int_X e^{-\left(ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3\right)} dxdy = \frac{C}{\sqrt[6]{D}} \tag{7}$$

なる “公式” を与えた。ここに C は定数で、D は 3 次方程式

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

の判別式

$$D = b^2c^2 + 18abcd - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2 \tag{8}$$

である。これはある種の**繰り込み**であるが、やはり意味不明である。

これを打開するため Fujii は論文 [2] で変数変換 $x = t\rho,\ y = \rho$ を行って

$$
\begin{aligned}
(6)\text{ の左辺} &= \int\int e^{-\rho^3\left(at^3+bt^2+ct+d\right)}|\rho|dtd\rho = \int\left\{\int e^{-\left(at^3+bt^2+ct+d\right)\rho^3}|\rho|d\rho\right\}dt \\
&= \int|\sigma|e^{-\sigma^3}d\sigma\int\frac{1}{|\sqrt[3]{at^3+bt^2+ct+d}|\sqrt[3]{at^3+bt^2+ct+d}}dt
\end{aligned}
$$

とした（最後に変数変換 $\sigma = \sqrt[3]{at^3+bt^2+ct+d}\,\rho$ を使った）。従って発散するパートは

$$
\int_{\mathbf{R}}|\sigma|e^{-\sigma^3}d\sigma
$$

で、主要パートは

$$
\int_{\mathbf{R}}\frac{1}{|\sqrt[3]{ax^3+bx^2+cx+d}|\sqrt[3]{ax^3+bx^2+cx+d}}dx \tag{9}
$$

である（t を x に変えた）。この積分を (6) の繰り込みに採用したいのだが、その形はバランスが悪く、更に計算することが非常に難しい（以下の節を見よ）。そこで “少し”ばかり修正して

定義 (6) の “繰り込み”を

$$
\ddagger\int\int_{\mathbf{R}^2} e^{-(ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3)}dxdy\ \ddagger = \int_{\mathbf{R}}\frac{1}{\sqrt[3]{(ax^3+bx^2+cx+d)^2}}dx \tag{10}
$$

と定義する。

Fujii は上の論文でこの積分に関して

(A) For $D < 0$

$$
\int_{\mathbf{R}}\frac{1}{\sqrt[3]{(ax^3+bx^2+cx+d)^2}}dx = \frac{C_-}{\sqrt[6]{-D}},\quad C_- = \sqrt[3]{2}B(\frac{1}{2},\frac{1}{6}). \tag{11}
$$

(B) For $D > 0$

$$
\int_{\mathbf{R}}\frac{1}{\sqrt[3]{(ax^3+bx^2+cx+d)^2}}dx = \frac{C_+}{\sqrt[6]{D}},\quad C_+ = 3B(\frac{1}{3},\frac{1}{3}). \tag{12}
$$

(C) C_- と C_+ の関係

$$
C_+ = \sqrt{3}C_-. \tag{13}
$$

なる公式を得た（証明は付録を見よ）。ここに B はベータ関数

$$
B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \int_0^\infty\frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}dx \tag{14}
$$

である。

コメント 3次方程式の判別式が積分計算に顔を出したことは（Fujii の知る限りでは）無い。これが面白いところである。

多くの問題が出てくる。例えば、

1) この公式からガウシアンの場合に相当する種々の結果は出てくるのか？

2) Morozov & Shakirov の結果と Fujii のそれはどのように関係しているのか？

3) 多次元化は可能なのか？

1) ガウシアンの場合

$$f(x,y)=px^2+qxy+ry^2=(x,y)\begin{pmatrix} p & \frac{q}{2} \\ \frac{q}{2} & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\mathbf{x}^t A\mathbf{x}$$

と行列表現が出来、結果として

$$|A|=pr-\frac{q^2}{4}=-\frac{1}{4}(q^2-4pr)=-\frac{1}{4}D$$

より、行列式と2次方程式の判別式が比例している。

しかしノン・ガウシアンの場合、例えば

$$f(x,y)=ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3$$

を行列で表現することは出来ない。出来るとすれば**立体行列**の理論が必要になる。他方 (11), (12) より積分計算には3次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の判別式

$$D=b^2c^2+18abcd-4ac^3-4b^3d-27a^2d^2$$

が出てくる。

立体行列の "行列式" と代数方程式の判別式の関係は、昔ケーリーが研究したと聞いている（詳細は知らない）。

2) 本質的問題は、 Fujii の計算

$$\int_{\mathbf{R}}\frac{1}{\sqrt[3]{(ax^3+bx^2+cx+d)^2}}dx=\frac{C_-}{\sqrt[6]{-D}}\quad \text{for}\quad D<0$$

$$\int_{\mathbf{R}}\frac{1}{\sqrt[3]{(ax^3+bx^2+cx+d)^2}}dx=\frac{C_+}{\sqrt[6]{D}}\quad \text{for}\quad D>0$$

が示すように $D=0$ を跨いで積分の定数（C_+ と C_-）の値が異なってしまうことである。このことは Morozov & Shakirov の結果

$$\int\int_X e^{-\left(ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3\right)}dxdy=\frac{C}{\sqrt[6]{D}}$$

と compatible なのであろうか？ と言う疑問である。

3) 更に、ノン・ガウシアンの多次元化を考えないと多くの応用は期待出来ないかも知れない。ガウシアンの場合はこれが可能だったからこそ応用範囲が広いのである。今のところ多次元化についてはサッパリわからない。

[III] おわりに

もし以上のことがうまく行けば（多分ありえないが)、更なるノン・ガウシアンを取扱いたい。即ち、

$$f(x,y) = a_0x^4 + a_1x^3y + a_2x^2y^2 + a_3xy^3 + a_4y^4$$

に対して

$$\int\int_{\mathbf{R}^2} e^{-f(x,y)}dxdy = \int\int_{\mathbf{R}^2} e^{-(a_0x^4+a_1x^3y+a_2x^2y^2+a_3xy^3+a_4y^4)}dxdy = \frac{C_\pm}{\sqrt[12]{\pm D}}$$

が期待されている。ここに D は 4 次方程式

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$$

の判別式

$$\begin{aligned} D_{n=4} \;=\;& 256a_0^3a_4^3 - 4a_1^3a_3^3 - 27a_0^2a_3^4 - 27a_1^4a_4^2 - 128a_0^2a_2^2a_4^2 + a_1^2a_2^2a_3^2 + 16a_0a_2^4a_4 \\ & -4a_0a_2^3a_3^2 - 4a_1^2a_2^3a_4 + 144a_0^2a_2a_3^2a_4 - 6a_0a_1^2a_3^2a_4 + 144a_0a_1^2a_2a_4^2 - 192a_0^2a_1a_3a_4^2 \\ & +18a_0a_1a_2a_3^3 + 18a_1^3a_2a_3a_4 - 80a_0a_1a_2^2a_3a_4, \end{aligned}$$

である。

更に

$$f(x,y) = a_0x^5 + a_1x^4y + a_2x^3y^2 + a_3x^2y^3 + a_4xy^4 + a_5y^5$$

に対しては

$$\int\int_{\mathbf{R}^2} e^{-(a_0x^5+a_1x^4y+a_2x^3y^2+a_3x^2y^3+a_4xy^4+a_5y^5)}dxdy = \infty$$

なので、“繰り込み”

$$\ddagger\int\int_{\mathbf{R}^2} e^{-f(x,y)}dxdy\ \ddagger = \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sqrt[5]{(a_0x^5+a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5)^2}}dx$$

をしなければならない。このとき

$$\ddagger\int\int_{\mathbf{R}^2} e^{-f(x,y)}dxdy\ \ddagger = \frac{C_\pm}{\sqrt[20]{D_\pm}}$$

は期待されるか？

ここに D は5次方程式

$$a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 = 0$$

の判別式

$$\begin{aligned}
& D_{n=5} \\
= \ & 3125a_0^4a_5^4 - 2500a_0^3a_1a_4a_5^3 - 3750a_0^3a_2a_3a_5^3 + 2000a_0^3a_2a_4^2a_5^2 + 2250a_0^3a_3^2a_4a_5^2 \\
& -1600a_0^3a_3a_4^3a_5 + 256a_0^3a_4^5 + 2000a_0^2a_1^2a_3a_5^3 - 50a_0^2a_1^2a_4^2a_5^2 + 2250a_0^2a_1a_2^2a_5^3 \\
& -2050a_0^2a_1a_2a_3a_4a_5^2 + 160a_0^2a_1a_2a_4^3a_5 - 900a_0^2a_1a_3^3a_5^2 + 1020a_0^2a_1a_3^2a_4^2a_5 - 192a_0^2a_1a_3a_4^4 \\
& -900a_0^2a_2^3a_4a_5^2 + 825a_0^2a_2^2a_3^2a_5^2 + 560a_0^2a_2^2a_3a_4^2a_5 - 128a_0^2a_2^2a_4^4 - 630a_0^2a_2a_3^3a_4a_5 \\
& +144a_0^2a_2a_3^2a_4^3 + 108a_0^2a_3^5a_5 - 27a_0^2a_3^4a_4^2 - 1600a_0a_1^3a_2a_5^3 + 160a_0a_1^3a_3a_4a_5^2 \\
& -36a_0a_1^3a_4^3a_5 + 1020a_0a_1^2a_2^2a_4a_5^2 + 560a_0a_1^2a_2a_3^2a_5^2 - 746a_0a_1^2a_2a_3a_4^2a_5 + 144a_0a_1^2a_2a_4^4 \\
& +24a_0a_1^2a_3^3a_4a_5 - 6a_0a_1^2a_3^2a_4^3 - 630a_0a_1a_2^3a_3a_5^2 + 24a_0a_1a_2^3a_4^2a_5 + 356a_0a_1a_2^2a_3^2a_4a_5 \\
& -80a_0a_1a_2^2a_3a_4^3 - 72a_0a_1a_2a_3^4a_5 + 18a_0a_1a_2a_3^3a_4^2 + 108a_0a_2^5a_5^2 - 72a_0a_2^4a_3a_4a_5 + 16a_0a_2^4a_4^3 \\
& +16a_0a_2^3a_3^3a_5 - 4a_0a_2^3a_3^2a_4^2 + 256a_1^5a_5^3 - 192a_1^4a_2a_4a_5^2 - 128a_1^4a_3^2a_5^2 + 144a_1^4a_3a_4^2a_5 \\
& -27a_1^4a_4^4 + 144a_1^3a_2^2a_3a_5^2 - 6a_1^3a_2^2a_4^2a_5 - 80a_1^3a_2a_3^2a_4a_5 + 18a_1^3a_2a_3a_4^3 + 16a_1^3a_3^4a_5 \\
& -4a_1^3a_3^3a_4^2 - 27a_1^2a_2^4a_5^2 + 18a_1^2a_2^3a_3a_4a_5 - 4a_1^2a_2^3a_4^3 - 4a_1^2a_2^2a_3^3a_5 + a_1^2a_2^2a_3^2a_4^2.
\end{aligned}$$

である。

次第に凄まじい様相を呈してきて、コントロール出来るか否かよくわからない。

我々の研究目的はガウシアンを乗り越えて、新しいパラダイムを構築することである。これは誰かが、どこかでなさなければならない基礎研究である。

幼少の伊豆の踊り子達にとって天城越えは辛かったように、我々数学者や数理物理学者にとってもガウス越えは本当にハードなのである。

付録：公式の証明

この付録で公式 (A), (B), (C) (各々 (11), (12), (13)) の証明を与える。

(A) の証明 ： $D < 0$ の場合に (11) を証明する。

まず3次の多項式 $ax^3 + bx^2 + cx + d$ で、 $a = 0$ の場合を考える。即ち、

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sqrt[3]{(bx^2 + cx + d)^2}} dx$$

を計算する。この場合 $-D = b^2(4bd - c^2) > 0$ に注意すると

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sqrt[3]{(bx^2+cx+d)^2}}dx &= \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sqrt[3]{b^2}\sqrt[3]{(x^2+\frac{c}{b}x+\frac{d}{b})^2}}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt[3]{b^2}}\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sqrt[3]{\left((x+\frac{c}{2b})^2+\frac{d}{b}-\frac{c^2}{4b^2}\right)^2}}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt[3]{b^2}}\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sqrt[3]{\left(x^2+\frac{4bd-c^2}{4b^2}\right)^2}}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt[3]{b^2}}\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sqrt[3]{(x^2+T^2)^2}}dx \qquad T^2 \equiv \frac{4bd-c^2}{4b^2} > 0 \\
&= \frac{1}{\sqrt[3]{b^2}}\int_{\mathbf{R}} \frac{T}{\sqrt[3]{T^4}\sqrt[3]{(y^2+1)^2}}dy \iff x = Ty \\
&= \frac{2}{\sqrt[3]{b^2T}}\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(y^2+1)^2}}dy \\
&= \frac{2}{\sqrt[3]{b^2T}}\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}\frac{dx}{2\sqrt{x}} \iff y = \sqrt{x} \\
&= \frac{1}{\sqrt[3]{b^2T}}\int_0^{\infty} \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{(x+1)^{\frac{2}{3}}}dx \\
&= \frac{B(\frac{1}{2},\frac{1}{6})}{\sqrt[3]{b^2T}} \iff (14) \\
&= \frac{B(\frac{1}{2},\frac{1}{6})}{\sqrt[6]{b^4T^2}} \\
&= \frac{\sqrt[3]{2}B(\frac{1}{2},\frac{1}{6})}{\sqrt[6]{b^2(4bd-c^2)}} \iff T^2 \equiv \frac{4bd-c^2}{4b^2} \\
&= \frac{\sqrt[3]{2}B(\frac{1}{2},\frac{1}{6})}{\sqrt[6]{-D}} \qquad (15)
\end{aligned}$$

を得る。

条件 $D < 0$ より $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ は一つの実根をもつ。最初にそれを $x = 0$ とする。この場合 $d = 0$ で

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = x(ax^2 + bx + c)$$

となる。このとき

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(ax^2+bx+c)^2}}dx \\
&= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(ax^2+bx+c)^2}}dx + \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(ax^2+bx+c)^2}}dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{y^2}\left(\frac{a}{y^2}+\frac{b}{y}+c\right)^2}}\left(-\frac{dy}{y^2}\right) + \int_{0}^{-\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{y^2}\left(\frac{a}{y^2}+\frac{b}{y}+c\right)^2}}\left(-\frac{dy}{y^2}\right) \Longleftarrow x=\frac{1}{y} \\
&= \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(cy^2+by+a)^2}}dy + \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{(cy^2+by+a)^2}}dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(cy^2+by+a)^2}}dy \\
&= \frac{\sqrt[3]{2}B(\frac{1}{2},\frac{1}{6})}{\sqrt[6]{c^2(4ac-b^2)}} \Longleftarrow (15)\ (c\to b;\ b\to c;\ a\to d) \\
&= \frac{\sqrt[3]{2}B(\frac{1}{2},\frac{1}{6})}{\sqrt[6]{-D}} \qquad (16)
\end{aligned}
$$

となる。

次にその実根を α とすると

$$
ax^3+bx^2+cx+d=(x-\alpha)(ax^2+kx+l);\quad a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d=0
$$

と表せる。これを展開すると

$$
b=k-a\alpha,\quad c=l-k\alpha,\quad d=-l\alpha \qquad (17)
$$

を得る。このとき

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-\alpha)^2(ax^2+kx+l)^2}}dx \\
&= \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sqrt[3]{y^2\{a(y+\alpha)^2+k(y+\alpha)+l\}^2}}dy \Longleftarrow x=y+\alpha \\
&= \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sqrt[3]{y^2\{ay^2+(2a\alpha+k)y+(a\alpha^2+k\alpha+l)\}^2}}dy \\
&= \frac{\sqrt[3]{2}B(\frac{1}{2},\frac{1}{6})}{\sqrt[6]{(a\alpha^2+k\alpha+l)^2\{4a(a\alpha^2+k\alpha+l)-(2a\alpha+k)^2\}}} \Longleftarrow (16) \\
&= \frac{\sqrt[3]{2}B(\frac{1}{2},\frac{1}{6})}{\sqrt[6]{(a\alpha^2+k\alpha+l)^2(4al-k^2)}} \qquad (18)
\end{aligned}
$$

となる。

Key Lemma (17) より等式

$$
\begin{aligned}
(a\alpha^2+k\alpha+l)^2(4al-k^2) &= 27a^2d^2+4ac^3-18abcd-b^2c^2+4b^3d \\
&= -D \qquad (19)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。

証明は straightforward だが、長いので省略する。

以上のことから (18) と Main Lemma より

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-\alpha)^2(ax^2+kx+l)^2}}dx = \frac{\sqrt[3]{2}B(\frac{1}{2},\frac{1}{6})}{\sqrt[6]{-D}} \tag{20}$$

を得る。 これで (11) の証明が完成した。

(B) の証明 ： $D>0$ の場合に (12) を証明する。

まず $\alpha>0$ として積分

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(x-\alpha)^2}}dx$$

を考える。このとき

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(x-\alpha)^2}}dx &= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(x-\alpha)^2}}dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(x-\alpha)^2}}dx \\ &= \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(x+\alpha)^2}}dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(x-\alpha)^2}}dx \end{aligned} \tag{21}$$

となる。ここで右辺の最初の積分に対して変数変換 $x \to -x$ を行った。

各項を計算しよう。

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(x+\alpha)^2}}dx &= \frac{1}{\sqrt[3]{\alpha}}\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{t^2(t+1)^2}}dt \quad \Longleftarrow x=\alpha t \\ &= \alpha^{-\frac{1}{3}}\int_{0}^{\infty} \frac{t^{-\frac{2}{3}}}{(t+1)^{\frac{2}{3}}}dt \\ &= \alpha^{-\frac{1}{3}}B(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) \quad \Longleftarrow (14)\end{aligned}$$

で、他方

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(x-\alpha)^2}}dx &= \alpha^{-\frac{1}{3}}\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{t^2(t-1)^2}}dt \quad \Longleftarrow x=\alpha t \\ &= \alpha^{-\frac{1}{3}}\left\{\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{t^2(t-1)^2}}dt + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{t^2(t-1)^2}}dt\right\} \\ &= \alpha^{-\frac{1}{3}}\left\{\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{t^2(1-t)^2}}dt + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{t^2(t-1)^2}}dt\right\} \\ &= 2\alpha^{-\frac{1}{3}}\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{t^2(1-t)^2}}dt\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\alpha^{-\frac{1}{3}} \int_0^1 t^{-\frac{2}{3}} (1-t)^{-\frac{2}{3}} dt \\
&= 2\alpha^{-\frac{1}{3}} B(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})
\end{aligned}
$$

となる。ここで

$$
\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{t^2(t-1)^2}} dt &= \int_1^0 \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{s^2} \frac{(1-s)^2}{s^2}}} (-\frac{ds}{s^2}) \Longleftarrow t = \frac{1}{s} \\
&= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{s^2(1-s)^2}} ds = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{t^2(1-t)^2}} dt
\end{aligned}
$$

を使った。(21) より

$$
\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(x-\alpha)^2}} dx = 3\alpha^{-\frac{1}{3}} B(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{3B(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})}{\sqrt[3]{\alpha}} \tag{22}
$$

を得る。

次に 3 次の多項式 $ax^3 + bx^2 + cx + d$ で、 $a = 0$ の場合を考える。このとき $D = b^2(c^2 - 4bd) > 0$ であるから

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sqrt[3]{(bx^2 + cx + d)^2}} dx &= \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{\left\{ b(x + \frac{c}{2b})^2 - \frac{c^2 - 4bd}{4b} \right\}^2}} dx \\
&= \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{(bx^2 - \frac{c^2 - 4bd}{4b})^2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt[3]{b^2}} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{(x^2 - \alpha^2)^2}} dx \Longleftarrow \alpha^2 = \frac{c^2 - 4bd}{4b^2} > 0 \\
&= \frac{1}{\sqrt[3]{b^2}} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{(x-\alpha)^2(x+\alpha)^2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt[3]{b^2}} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{y^2(y - 2\alpha)^2}} dy \Longleftarrow y = x + \alpha \\
&= \frac{1}{\sqrt[3]{b^2}} \frac{3B(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})}{\sqrt[3]{2\alpha}} \Longleftarrow (22) \\
&= \frac{3B(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})}{\sqrt[3]{2\alpha b^2}} \\
&= \frac{3B(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})}{\sqrt[6]{4\alpha^2 b^4}} \\
&= \frac{3B(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})}{\sqrt[6]{b^2(c^2 - 4bd)}} \Longleftarrow \alpha^2 = \frac{c^2 - 4bd}{4b^2} \\
&= \frac{3B(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})}{\sqrt[6]{D}} \qquad (23)
\end{aligned}
$$

を得る。

条件 $D>0$ より $ax^3+bx^2+cx+d=0$ は一つの実根をもつ。最初にそれを $x=0$ とする。この場合 $d=0$ で

$$ax^3+bx^2+cx+d=x(ax^2+bx+c)$$

となる。このとき $D=c^2(b^2-4ac)$ で

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2(ax^2+bx+c)^2}}dx\\
=\ &\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2(ax^2+bx+c)^2}}dx+\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2(ax^2+bx+c)^2}}dx\\
=\ &\int_{\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{y^2}\left(\frac{a}{y^2}+\frac{b}{y}+c\right)^2}}\left(-\frac{dy}{y^2}\right)+\int_0^{-\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{y^2}\left(\frac{a}{y^2}+\frac{b}{y}+c\right)^2}}\left(-\frac{dy}{y^2}\right)\ \Longleftarrow\ x=\frac{1}{y}\\
=\ &\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(cy^2+by+a)^2}}dy+\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt[3]{(cy^2+by+a)^2}}dy\\
=\ &\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(cy^2+by+a)^2}}dy\\
=\ &\frac{3B(\frac{1}{3},\frac{1}{3})}{\sqrt[6]{c^2(b^2-4ac)}}\ \Longleftarrow\ (23)\ (c\to b;\ b\to c;\ a\to d)\\
=\ &\frac{3B(\frac{1}{3},\frac{1}{3})}{\sqrt[6]{D}}
\end{aligned}\tag{24}$$

となる。

次にその実根を α とすると

$$ax^3+bx^2+cx+d=(x-\alpha)(ax^2+kx+l);\quad a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d=0$$

と表せ、これを展開して

$$b=k-a\alpha,\quad c=l-k\alpha,\quad d=-l\alpha$$

を得る。このとき

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-\alpha)^2(ax^2+kx+l)^2}}dx\\
=\ &\int_{\mathbf{R}}\frac{1}{\sqrt[3]{y^2\{a(y+\alpha)^2+k(y+\alpha)+l\}^2}}dy\ \Longleftarrow\ x=y+\alpha\\
=\ &\int_{\mathbf{R}}\frac{1}{\sqrt[3]{y^2\{ay^2+(2a\alpha+k)y+(a\alpha^2+k\alpha+l)\}^2}}dy\\
=\ &\frac{3B(\frac{1}{3},\frac{1}{3})}{\sqrt[6]{(a\alpha^2+k\alpha+l)^2\{(2a\alpha+k)^2-4a(a\alpha^2+k\alpha+l)\}}}\ \Longleftarrow\ (24)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{3B(\frac{1}{3},\frac{1}{3})}{\sqrt[6]{(a\alpha^2+k\alpha+l)^2(k^2-4al)}} \\
&= \frac{3B(\frac{1}{3},\frac{1}{3})}{\sqrt[6]{D}} \quad \Longleftarrow (19) \qquad (25)
\end{aligned}
$$

となる。これで (12) の証明が完成した。

(C) の証明 ： (13) の証明をする。

少し準備をする。ガンマ関数

$$
\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \quad (x>0) \tag{26}
$$

に対して公式

$$
\begin{aligned}
B(x,y) &= \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (x,y>0) && (27)\\
\Gamma(x)\Gamma(1-x) &= \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \quad (0<x<1) && (28)\\
\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}}\Gamma(x) = 2^{1-x}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(x) && (29)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。

最後の式は ルジャンドルの関係式 と呼ばれている。この式で特に $x=2/3$ を代入すると

$$
\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right) = \sqrt[3]{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)
$$

である。両辺に $\Gamma(1/6)$ を掛け、計算を続けると

$$
\begin{aligned}
& \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{6}\right) = \sqrt[3]{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{6}\right) \\
\Longleftrightarrow\quad & \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{6})} = \sqrt[3]{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \quad \Longleftarrow (28) \\
\Longleftrightarrow\quad & 2\pi\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt[3]{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \\
\Longleftrightarrow\quad & 2\pi\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt[3]{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \\
\Longleftrightarrow\quad & 2\pi\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} = \sqrt[3]{2}B(\frac{1}{2},\frac{1}{6}) \quad \Longleftarrow (27) \\
\Longleftrightarrow\quad & 2\pi\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{3})}} = \sqrt[3]{2}B(\frac{1}{2},\frac{1}{6}) \quad \Longleftarrow (28) \\
\Longleftrightarrow\quad & \sqrt{3}B(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) = \sqrt[3]{2}B(\frac{1}{2},\frac{1}{6}) \quad \Longleftarrow (27)
\end{aligned}
$$

を得る。これで (13) の証明が完成した。

謝辞 計算をチェックしてもらった舟橋久仁夫氏と鈴木達夫氏に感謝します。

参考文献

[1] A. Morozov and Sh. Shakirov : Introduction to Integral Discriminants, arXiv: 0903.2595 [math-ph].

[2] K. Fujii : Beyond Gaussian : A Comment, arXiv: 0905.1363 [math-ph].

[3] 藤井一幸： 3 次方程式の一般論, レクチャー・ノート（横浜市大）.

[4] 沼澤秀亮： 4 次方程式の一般論, 横浜市立大学・卒業論文（横浜市大）.

[5] 佐竹一郎：線型代数学, 裳華房.

[6] E. アルティン：ガンマ関数入門, 上野建爾 [訳・解説], 日本評論社.